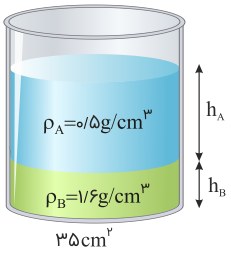
# فیزیک

**۱** گزینه ۱

مطابق شکل زیر، مایعی که چگالی کمتری دارد، بالاتر قرار می‌گیرد. چون جرم هر دو مایع یکسان است، داریم:




$$m_A = m_B \Rightarrow \rho_A V_A = \rho_B V_B \xrightarrow{V=Ah} \rho_A h_A A = \rho_B h_B A$$

$$\xrightarrow[\rho_B=1/6 \frac{g}{cm^3}]{\rho_A=0/5 \frac{g}{cm^3}} 0/5 h_A = 1/6 h_B \Rightarrow h_A = 3/2 h_B \ (1)$$

ازطرفی مجموع ارتفاع دو مایع برابر با ۳۵ سانتی‌متر است، لذا داریم:

$$h_A + h_B = 35 \xrightarrow{(1)} 3/2 h_B + h_B = 35 \Rightarrow 4/2 h_B = 35$$
$$\Rightarrow h_B = 8/3, h_A = 26/7 cm$$

حال برای به دست آوردن مجموع جرم مایع‌های داخل ظرف، داریم:

$$m_t = m_A + m_B \xrightarrow{m_A=m_B} m_t = 2m_A = 2\rho_A V_A$$
$$\Rightarrow m_t = 2 \times 0/5 \times 35 \times 26/7 = 934/5 g$$

**۲** گزینه ۱

ابتدا یکای چگالی مخلوط را برحسب $kg/L$ می‌نویسیم:

$$\rho = ۸۰۰\frac{kg}{m^۳} \times \frac{m^۳}{۱۰۰۰L} = ۰/۸kg/L$$

باتوجه‌به رابطهٔ چگالی مخلوط داریم:

$$\rho_{مخلوط} = \frac{m_۱ + m_۲}{V_۱ + V_۲} \xrightarrow{V=\frac{m}{\rho}} \rho_{مخلوط} = \frac{m_۱ + m_۲}{\frac{m_۱}{\rho_۱} + \frac{m_۲}{\rho_۲}}$$

$$۰/۸ = \frac{m_۱ + m_۲}{\frac{m_۱}{۲} + \frac{m_۲}{۰/۷}} \Rightarrow ۰/۴m_۱ + \frac{۸}{۷}m_۲ = m_۱ + m_۲$$

$$\Rightarrow ۰/۶m_۱ = \frac{۱}{۷}m_۲ \Rightarrow \frac{m_۱}{m_۲} = \frac{۱}{۷} \times \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۲۱}$$

**۳** گزینه ۳

ابتدا دمای تعادل را برحسب درجهٔ سلسیوس به دست می‌آوریم:

$$F_e = \frac{۹}{۵}\theta_e + ۳۲ \Rightarrow ۳۲ = \frac{۹}{۵}\theta_e + ۳۲ \Rightarrow \theta_e = ۰^\circ C$$

چون حداقل جرم آب را می‌خواهیم، یعنی جرم آب آن‌قدر کم است که تمام آن منجمد و به یخ $۰^\circ C$ تبدیل می‌شود. پس محصول نهایی پس از تعادل یخ $۰^\circ C$ است.

$$Q_{آب} + Q_{یخ} = ۰ \Rightarrow (m \times \cancel{c_{آب}^{۲}}\Delta\theta_{آب} - m\cancel{L_F^{۱۶۰}}) + (m'\cancel{c_{یخ}^{۱}}\Delta\theta_{یخ}) = ۰$$
$$\Rightarrow -۴۰m - ۱۶۰m + m' \times ۲۰ = ۰ \Rightarrow ۲۰۰m = m' \times ۲۰ \Rightarrow m = ۰/۱m' = ۱g$$

**۴** گزینه ۳

طبق رابطهٔ تعادل گرمایی مقدار گرمایی که آلومینیم از دست می‌دهد تا به دمای تعادل برسد، همان مقدار گرما را مس می‌گیرد تا به دمای تعادل برسد، پس مورد (پ) درست است.

رابطهٔ دمای تعادل را برای دو جسم می‌نویسیم:

$$Q_{Al} + Q_{cu} = ۰ \Rightarrow c_{Al}\Delta\theta_{Al} + c_{cu}\Delta\theta_{cu} = ۰ \Rightarrow c_{Al}(\theta_e - ۸۰) + c_{cu}(\theta_e - ۴۰) = ۰$$
$$\Rightarrow \frac{c_{Al}}{c_{cu}} = \frac{\theta_e - ۴۰}{۸۰ - \theta_e} \xrightarrow{\theta_e > ۶۰} \frac{\theta_e - ۴۰}{۸۰ - \theta_e} > ۱ \Rightarrow \frac{c_{Al}}{c_{cu}} > ۱ \Rightarrow c_{Al} > c_{cu}$$

پس ظرفیت گرمایی مس کمتر از ظرفیت گرمایی آلومینیم است. (مورد (ب) درست است)

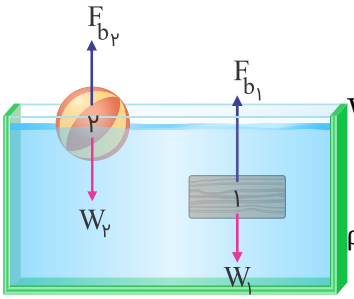
ظرفیت گرمایی برابر حاصل ضرب جرم در گرمای ویژه است پس:

$$c_{Al} > c_{cu} \Rightarrow m_{Al}c_{Al} > m_{cu}c_{cu}$$

چون گرمای ویژهٔ آلومینیم بیشتر از گرمای ویژهٔ مس است، پس نمی‌توان اظهارنظر قطعی دربارهٔ جرم دو جسم داشت و مورد (الف) می‌تواند درست یا نادرست باشد.

**۵** گزینه ۴

هر دو جسم در حال تعادل هستند. بنابراین $F_b = W$ است. چون وزن دو جسم یکسان است داریم:




$$W_۱ = W_۲ \Rightarrow F_{b_۱} = F_{b_۲}$$

ازآنجاکه جسم ۲ شناور و جسم ۱ غوطه‌ور است می‌توان نتیجه گرفت:

$$\rho_۲ < \rho_۱$$

**۶** گزینه ۲

طبق اطلاعات سؤال، چون $\rho_B > \rho_A > \rho_C$ است، درنتیجه مایع $B$ در کف ظرف و مایع $C$ در بالای ظرف قرار می‌گیرند. برای مقایسه عمق دو مایع، ابتدا باید حجم‌ها را مقایسه کنیم.

$$V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \begin{cases} V_B = \frac{۴m}{۱/۶\rho} = ۲/۵\frac{m}{\rho} \\ V_C = \frac{m}{\rho} = ۱\frac{m}{\rho} \end{cases}$$

ازآنجایی‌که حجم استوانه برابر با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است، داریم:

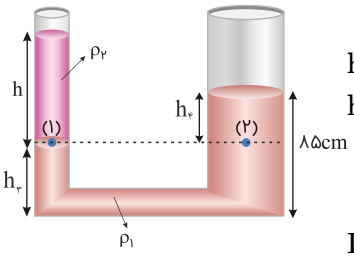
$$V = Ah \Rightarrow h = \frac{V}{A} \Rightarrow \frac{h_B}{h_C} = \frac{V_B}{V_C} \times \frac{A_C}{A_B} = \frac{۲/۵\frac{m}{\rho}}{۱\frac{m}{\rho}} \times ۱ = ۲/۵$$

**۷** گزینه ۱

ارتفاع مایع جابه‌جاشده در دو طرف لوله با سطح مقطع رابطهٔ عکس دارد. در شاخهٔ سمت راست مایع باید به اندازهٔ $۵cm$ بالا بیاید. پس داریم:

$$\frac{h_۲}{h_۱} = \frac{A_۱}{A_۲} \Rightarrow \frac{h_۲}{۵} = \frac{۲۰۰}{۵۰} \Rightarrow h_۲ = ۲۰cm$$

بنابراین در شاخهٔ سمت چپ مایع ۲۰ سانتی‌متر پایین می‌رود.




$$h_۳ = ۸۰ - ۲۰ = ۶۰$$
$$h_۴ = ۸۵ - ۶۰ = ۲۵$$

با مساوی قرار دادن فشار در نقاط ۱ و۲ درون مایع، $h$ به دست می‌آید.

$$P_۱ = P_۲$$

$$\Rightarrow \rho_۲gh + P_۰ = \rho_۱gh_۴ + P_۰ \Rightarrow ۳ \times h = ۶ \times ۲۵ \Rightarrow h = ۵۰cm$$

$$V' = A_۲ \times h = ۵۰ \times ۵۰ = ۲۵۰۰cm^۳$$

**۸** گزینه ۱

توان خودرو صرف تغییر انرژی جنبشی خودرو می‌شود و چون توان خودرو ثابت است، داریم:

$$\frac{\frac{۱}{۲}m(۶۰^۲ - ۴۰^۲)}{\Delta t_۲} = \frac{\frac{۱}{۲}m(۴۰^۲ - ۲۰^۲)}{۶} \Rightarrow \Delta t_۲ = ۱۰\,s$$

**۹** گزینه ۳

چون طول اولیهٔ میله‌ها باهم برابر است، اختلاف طول آن‌ها با اختلاف تغییر طول میله‌ها برابر است و چون $\alpha_{Al} > \alpha_{\text{فولاد}}$ است، داریم:

$$\Delta L_{Al} - \Delta L_{\text{فولاد}} = ۲/۳\,mm \Rightarrow \alpha_{Al} L\Delta\theta - \alpha_{\text{فولاد}} L\Delta\theta = ۲/۳\,mm$$
$$\Rightarrow (۲۳ - ۱۱/۵) \times ۱۰^{-۶} \times ۴۰۰۰ \times \Delta\theta = ۲/۳ \Rightarrow \Delta\theta = ۵۰\,^\circ C$$

**۱۰** گزینه ۳

مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی سطح زمین است.

$$E_C - E_A = W_f \Rightarrow (\cancel{K_C^\circ} + \cancel{U_C^\circ}) - (\cancel{K_A^\circ} + U_A) = f \times BC \times \cos ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow -mgh_A = f \times BC \times (-۱) \Rightarrow ۲ \times ۱۰ \times ۱/۵ = f \times ۴ \Rightarrow f = ۷/۵\,N$$

**۱۱** گزینه ۲

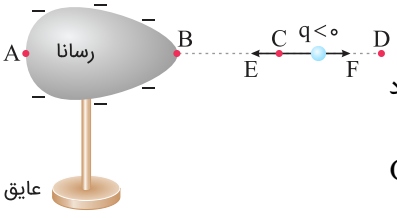
از رابطه‌های $C = \frac{Q}{V}$ و $C = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d}$ داریم:

$$\kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d} = \frac{Q}{V} \Rightarrow \kappa\varepsilon_۰ = \frac{Q}{A} \times \frac{d}{V} \xrightarrow{E=\frac{V}{d}} \kappa\varepsilon_۰ = \frac{Q}{A} \times \frac{۱}{E} \Rightarrow E = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_۰ A}$$

حالا اندازهٔ میدان بین صفحه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} Q = ۰/۱۸ \times ۱۰^{-۶} \\ A = ۱cm^۲ = ۱۰^{-۴}\,m^۲ \\ \kappa = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow E = \frac{۰/۱۸ \times ۱۰^{-۹}}{۱۰ \times ۹ \times ۱۰^{-۱۲} \times ۱ \times ۱۰^{-۴}} = ۲ \times ۱۰^۵\,V/m = ۲۰۰\,kV/m$$

**۱۲** گزینه ۲




بررسی عبارت‌ها:

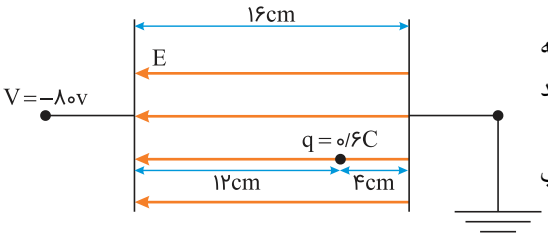
الف) چون حرکت بار در خلاف جهت نیروی الکتریکی وارد بر آن است، انرژی پتانسیل الکتریکی‌اش زیاد می‌شود. (درست)

ب) میدان الکتریکی از D تا C ضعیف‌تر از C تا B است، پس کار نیروی الکتریکی در D تا C کم‌تر از C تا B است (نادرست).

پ) چون جهت میدان الکتریکی به طرف B است، پس $V_D > V_C > V_B$ است. (نادرست)

ت) اگر جسم رسانا در حال تعادل الکتروستاتیکی باشد، پتانسیل الکتریکی نقاط آن یکسان است. (درست)

**۱۳** گزینه ۴




گام اول: باتوجه‌به اینکه جهت میدان الکتریکی به طرف چپ است و بار $q > ۰$ است، نتیجه می‌گیریم که نیروی وارد بر بار به طرف چپ است و بار به صفحه سمت چپ برخورد خواهد کرد.

گام دوم: باتوجه‌به اینکه فاصله دو صفحه $۱۶\,cm$ و فاصله نقطه $M$ تا صفحه سمت چپ $۱۲\,cm$ است، اختلاف پتانسیل الکتریکی $M$ تا صفحه سمت چپ را حساب می‌کنیم:

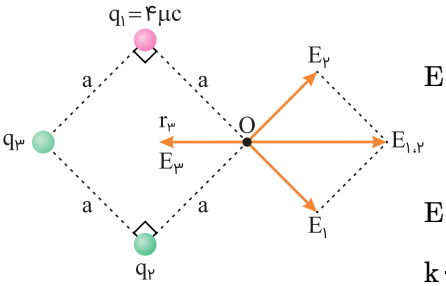
$$\frac{|\Delta V_۲|}{|\Delta V_۱|} = \frac{d_۲}{d_۱} \Rightarrow \frac{۸۰}{\Delta V_۱} = \frac{۱۶}{۱۲} \Rightarrow |\Delta V_۱| = ۶۰\,V \Rightarrow \Delta V_۱ = -۶۰\,V$$

گام سوم: با استفاده از رابطه $\Delta u = -\Delta k$، تندی ذره را هنگام برخورد به صفحه سمت چپ حساب می‌کنیم:

$$q\Delta V_۱ = -\frac{۱}{۲}mV^۲ \Rightarrow ۰/۶ \times (-۶۰) = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۲۰}{۱۰۰۰} \times V^۲ \Rightarrow ۳۶۰۰ = V^۲ \Rightarrow V = ۶۰\,m/s$$

**۱۴** گزینه ۱

چون فاصله $q_۱$ و $q_۲$ تا نقطه $O$ یکسان است و میدان الکتریکی $q_۳$ باید میدان حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را خنثی کند، باید $E_{۱,۲}$ نیمساز $E_۱$ و $E_۲$ باشد، پس نتیجه می‌گیریم که $|q_۲| = |q_۱|$ است، از طرف دیگر میدان بار $q_۳$ در نقطه $O$ باید مخالف $E_{۱,۲}$ باشد، پس $q_۳$ باید منفی باشد.




$$E_{۱,۲} = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲} = \sqrt{۲}E_۱$$

برای محاسبه $q_۳$ می‌توان نوشت:

$$E_۳ = E_{۱,۲} \Rightarrow E_۳ = \sqrt{۲}E_۱$$
$$k\frac{|q_۳|}{r_۳^۲} = \sqrt{۲} \times k\frac{|q_۱|}{a^۲} \xrightarrow{r_۳ = \sqrt{۲}a} \frac{|q_۳|}{۲a^۲} = \sqrt{۲}\frac{|q_۱|}{a^۲}$$
$$|q_۳| = ۲\sqrt{۲} \times ۴ = ۸\sqrt{۲}\,\mu C \Rightarrow q_۳ = -۸\sqrt{۲}\,\mu C$$

**۱۵** گزینه ۴

گام اول: در حالتی که ولتاژ خازن را تغییر می‌دهیم، بنابر رابطه $Q = CV$، بار خازن نیز متناسب با ولتاژ خازن تغییر می‌کند، پس بار خازن نیز ۱۰ درصد زیاد می‌شود:

$$\frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{C_۲}{C_۱} \times \frac{V_۲}{V_۱} \xrightarrow[V_۲ = ۱/۱V_۱]{C_۲ = C_۱} \frac{Q_۲}{Q_۱} = ۱/۱ \Rightarrow Q_۲ = ۱/۱Q_۱$$

گام دوم: برای محاسبه مقدار $Q_۱$ می‌توان از رابطه انرژی خازن یعنی $U = \frac{Q^۲}{۲C}$ استفاده کرد و چنین نوشت:

$$U_۲ - U_۱ = \frac{Q_۲^۲}{۲C} - \frac{Q_۱^۲}{۲C} \Rightarrow ۲۱۰ = \frac{(۱/۱Q_۱)^۲ - Q_۱^۲}{۲ \times ۲۰}$$
$$۲۱۰ = \frac{۰/۲۱Q_۱^۲}{۴۰} \Rightarrow Q_۱^۲ = \frac{۲۱۰ \times ۴۰}{۲۱ \times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow Q_۱^۲ = ۴ \times ۱۰^۴ \Rightarrow Q_۱ = ۲۰۰\,\mu C \Rightarrow Q_۱ = ۲ \times ۱۰^{-۴}$$

**۱۶** گزینه ۳

اگر رسانایی مقاومت اهمی باشد، باید نمودار جریان- ولتاژ آن مبدأ گذر و به‌صورت خط باشد؛ یعنی:

$$R_A : \frac{۶}{۱/۵} \stackrel{?}{=} \frac{۸}{۲} \Rightarrow ۴ = ۴$$

در نتیجه خط $A$ مبدأ گذرا است، پس $R_A$ مقاومت اهمی است.

$$R_B = \frac{۶}{۰/۷۵} \stackrel{?}{=} \frac{۸}{۱} \Rightarrow ۸ = ۸$$

در نتیجه خط $B$ نیز مبدأ گذرا است، پس $R_B$ نیز مقاومت اهمی است.

**۱۷** گزینه ۱

گام اول: مدار تک‌حلقه ساده است و می‌دانیم اگر به ازای دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ در هر حالت توان خروجی مولد (که برابر توان مصرفی مقاومت $R$ است) یکسان باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$R_۱R_۲ = r^۲$$

پس مقدار $r$ را حساب می‌کنیم:

$$r^۲ = ۱ \times ۴ \Rightarrow r = ۲\ \Omega$$

گام دوم: اکنون از رابطه $P_{\text{تولیدی}} = \varepsilon I$ و جایگذاری $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ در آن می‌توان نوشت:

$$P_{\text{تولیدی}} = \frac{\varepsilon^۲}{R + r} = \frac{۱۲^۲}{۸ + ۲} \Rightarrow P_{\text{تولیدی}} = \frac{۱۴۴}{۱۰} = ۱۴/۴\ w$$

**۱۸** گزینه ۱

گام اول: هنگامی‌که کلید را ببندیم، لامپ دوم با لامپ اول موازی می‌شود، پس مقاومت معادل کم می‌شود.

گام دوم: از رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ می‌توان دریافت که جریان گذرنده از باتری افزایش می‌یابد، زیرا $R_{eq}$ که در مخرج کسر است کم شده است.

گام سوم: از رابطه $V = \varepsilon - Ir$ می‌توان دریافت ولتاژ باتری کاهش می‌یابد، زیرا جریان I افزایش یافته است. چون لامپ بالایی با باتری موازی است، ولت‌سنج ولتاژ لامپ و باتری را نشان می‌دهد، پس نتیجه می‌گیریم ولت‌سنج مقدار کم‌تری نشان می‌دهد.

گام چهارم: از رابطه $I = \frac{V}{R}$ برای لامپ بالایی استفاده می‌کنیم و چون $R$ (مقاومت لامپ) ثابت است، اما ولتاژ آن کاهش یافته است، پس جریان گذرنده از آن نیز کم می‌شود، از آنجا که آمپرسنج جریان گذرنده از لامپ بالایی را نشان می‌دهد، مقدار کمتری خواهد داشت.

**۱۹** گزینه ۲

گام اول: ولت‌سنج با باتری به‌صورت متوالی است و نتیجه می‌گیریم جریان کل مدار صفر است.

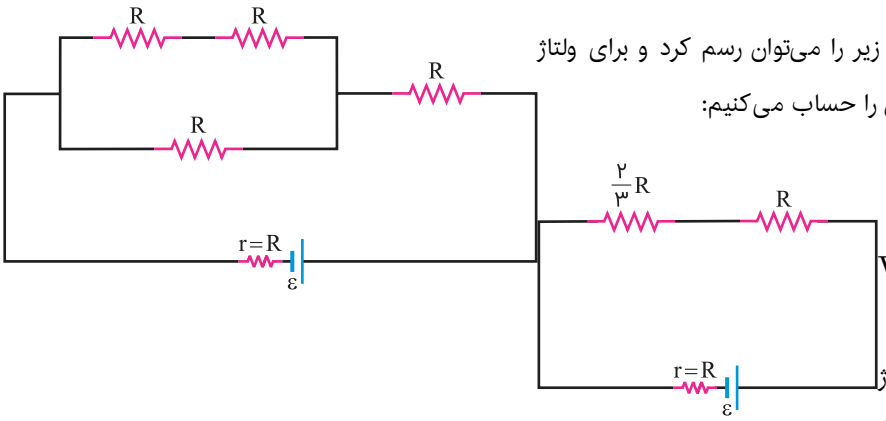
گام دوم: چون جریان کل مدار صفر است، آمپرسنج عدد صفر را نشان می‌دهد و اختلاف پتانسیل دو سر هر مقاومت نیز صفر است (بنابر رابطه $V = IR$).

گام سوم: بنابر موارد ذکر شده می‌توان نوشت:

$$V = \varepsilon$$

**۲۰** گزینه ۱

گام اول: مدار را به‌صورت شکل زیر درمی‌آوریم:




گام دوم: اگر مدار را در یک مرحله ساده کنیم، شکل زیر را می‌توان رسم کرد و برای ولتاژ کل مدار از رابطه $V = \frac{\varepsilon R_{eq}}{R_{eq} + r}$ استفاده کرده و آن را حساب می‌کنیم:

$$V = \frac{\varepsilon \frac{۵}{۳}R}{\frac{۵}{۳}R + R} = \frac{۵}{۸}\varepsilon$$

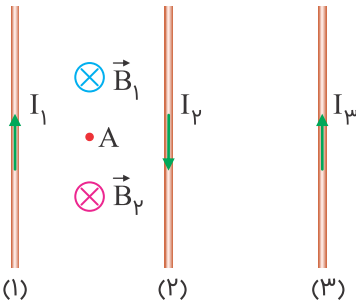
گام سوم: می‌دانیم در مقاومت‌های متوالی ولتاژ بیش‌تر به مقاومت بزرگ‌تر می‌رسد، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{V_R}{V_{\frac{۲}{۳}R}} = \frac{R}{\frac{۲}{۳}R} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow V_{\frac{۲}{۳}R} = \frac{۲}{۳}V_R$$

گام چهارم: چون $V_R + V_{\frac{۲}{۳}R} = \frac{۵}{۸}\varepsilon$ است، می‌توان $V_R$ را حساب کرد:

$$V_R + \frac{۲}{۳}V_R = \frac{۵}{۸}\varepsilon \Rightarrow \frac{۵}{۳}V_R = \frac{۵}{۸}\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{۸}{۳}V_R \xrightarrow{V_R = ۶\ v} \varepsilon = \frac{۸}{۳} \times ۶ = ۱۶\ v$$

**۲۱** گزینه ۱

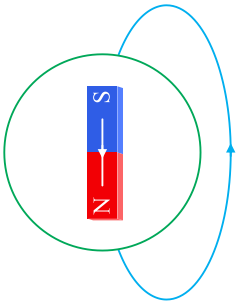



$B_A = ۰ \Rightarrow \vec{B}_۳ = \odot \Rightarrow$ جهت $I_۳$ به سمت بالا است

$\vec{B}_۳ = \vec{B}_۱ + \vec{B}_۲ \Rightarrow \vec{B}_۳ > \vec{B}_۲ \Rightarrow I_۳ > I_۲$

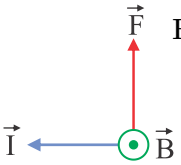
**۲۲** گزینه ۱

می‌دانیم قطب‌های آهنربای زمین خلاف قطب‌های جغرافیایی آن است و در داخل آهنربا میدان از S به N و در خارج آهنربا میدان از N به S می‌باشد، بنابراین در نقطهٔ P به سمت پایین (↓) و در نقطهٔ Z به سمت بالا (↑) می‌باشد.




**۲۳** گزینه ۳

برای حفظ تعادل باید برآیند نیروهای وارد بر سیم صفر باشد، چون جهت نیروی وزن رو به پایین است، پس باید جهت نیروی مغناطیسی رو به بالا باشد و طبق قاعدهٔ دست راست، بنابراین جهت جریان رو به چپ می‌باشد.




$$F = BIL \Rightarrow mg = BIL \xrightarrow{\text{چگالی } \rho=\frac{m}{V}} \rho V g = BIL$$

$$\Rightarrow I = \frac{\rho V g}{BL} \xrightarrow{V=A\times L} I = \frac{\rho A g}{B}$$

$$\Rightarrow I = \frac{۶ \times ۱۰^{+۳} \times ۴ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰}{۱۰} = ۲۴ \times ۱۰^{-۱} = ۲/۴\,A$$

یادآوری: $۱\,g/cm^۳ = ۱۰^۳\,kg/m^۳$

**۲۴** گزینه ۲

به خاطر تغییر میدان مغناطیسی در محل حلقه، شار مغناطیسی عبوری از آن تغییر و در آن جریان القایی به وجود می‌آید. چون قاب عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار دارد، نیم‌خط عمود بر قاب با خطوط میدان زاویهٔ صفر یا ۱۸۰ درجه می‌سازد پس داریم:

$$\varphi = AB\cos\theta = AB\cos ۰^\circ = AB$$

$$|\varepsilon| = |-N\frac{\Delta\phi}{\Delta t}| = NA|\frac{\Delta B}{\Delta t}|$$

$\frac{\Delta B}{\Delta t}$ برابر شیب نمودار $B-t$ است، بنابراین:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{۰/۶}{۳۰-۰} = ۰/۰۲\,T/s$$

$$|\varepsilon| = ۱۰۰ \times ۲۰ \times ۱۰^{-۴} \times ۰/۰۲ = ۴۰ \times ۱۰^{-۴}\,V$$

توان مصرفی در مقاومت را می‌توان از روابط $P = RI^۲$ یا $P = \frac{V^۲}{R}$ حساب کرد:

$$P = \frac{\varepsilon^۲}{R} \Rightarrow P = \frac{(۴۰ \times ۱۰^{-۴})^۲}{۰/۰۴} = ۴ \times ۱۰^{-۴}\,W$$

**۲۵** گزینه ۱

ابتدا ضلع مربع را به دست می‌آوریم و سپس از رابطهٔ $\varepsilon = Bv\ell$، نیروی محرکهٔ القایی را حساب می‌کنیم.

$$\ell^{۲} = ۴۰۰\,cm^{۲} \Rightarrow \ell = ۲۰\,cm = ۰/۲\,m$$
$$\varepsilon = Bv\ell = ۰/۲ \times ۲ \times ۱۰^{-۲} \times ۰/۲ = ۸ \times ۱۰^{-۴}\,V$$

از رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R}$، جریان القایی را حساب می‌کنیم.

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{۸ \times ۱۰^{-۴}}{۰/۰۲} = ۰/۰۴\,A$$

چون حلقه در حال خروج از میدان است، شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال کاهش است. بنابراین جهت میدان القایی باید در جهت میدان و برونسو باشد. طبق قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی، پادساعتگرد است.

## شیمی

**۲۶** گزینه ۴

فرض اول سوال: عنصر A دارای ۸ الکترون با $l = ۰$ (زیرلایهٔ s) است.

$$A : \underbrace{۱s^{۲}\ ۲s^{۲}\ \ldots\ ۳s^{۲}\ \ldots\ ۴s^{۲}}_{۸\ \text{الکترون}}$$

نتیجه: عنصر A در دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارد.
فرض دوم سوال: شمار الکترون‌های ظرفیتی عنصر A با عنصر گالیم $({}_{۳۱}Ga)$ برابر است.

$${}_{۳۱}Ga : [{}_{۱۸}Ar]۳d^{۱۰}\ \underline{۴s^{۲}۴p^{۱}}$$

نتیجه: عنصر A دارای ۳ الکترون ظرفیتی است؛ بنابراین این عنصر به گروه سوم جدول تناوبی تعلق دارد.
این آرایش الکترونی مربوط به عنصر واسطهٔ ${}_{۲۱}Sc$ می‌باشد.

$${}_{۲۱}A : [{}_{۱۸}Ar]۳d^{۱}\ ۴s^{۲}$$

در بین عنصرهای داده‌شده در گزینه‌ها، عنصر ایتریم $({}_{۳۹}Y)$ با عنصر A $({}_{۲۱}Sc)$ هم‌گروه است. برای تعیین موقعیت عنصر ${}_{۳۹}Y$ از گاز نجیب ${}_{۳۶}Kr$ کمک می‌گیریم. عدد اتمی عنصر ${}_{۳۹}Y$ سه واحد از عدد اتمی ${}_{۳۶}Kr$ (گاز نجیب دورهٔ چهارم) بیشتر است؛ به‌عبارت‌دیگر این عنصر در جدول تناوبی سه خانه جلوتر از عنصر ${}_{۳۶}Kr$ قرار دارد.

**۲۷** گزینه ۳

ازآنجاکه کتاب درسی در خصوص ارائه شکل طیف نشری خطی عنصرها در دو سال پی‌درپی (۹۹ و ۱۴۰۰) دچار تغییر شده است، این تست با شرط زیر برای دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم قابل استفاده است.

- مطابق کتاب درسی شیمی دهم (چاپ ۹۹)، طیف نشری خطی نئون حذف شده است و بیشترین تعداد خطوط طیفی در بین عنصرهای سدیم، هلیم، هیدروژن و لیتیم، مربوطبه عنصر هلیم (۶ خط طیفی) می‌باشد.
- در کتاب درسی شیمی دهم (چاپ ۱۴۰۰)، تعداد خطوط طیفی عنصر سدیم اصلاح شده و شامل ۷ خط طیفی است. بنابراین بیشترین تعداد خطوط طیفی را باید به عنصر سدیم نسبت دهیم.

**۲۸** گزینه ۲

غلظت هر ظرف را طبق فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مولاریته} = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}}$$

$$\left.\begin{array}{l} (۱)\ \text{ظرف} : M_۱ = \dfrac{۶ \times ۰/۰۱}{۵۰ \times ۰/۰۰۱} = ۱/۲\,mol.L^{-۱} \\ (۲)\ \text{ظرف} : M_۲ = \dfrac{۶ \times ۰/۰۱}{۱۰۰ \times ۰/۰۰۱} = ۰/۶\,mol.L^{-۱} \\ (۳)\ \text{ظرف} : M_۳ = \dfrac{۳ \times ۰/۰۱}{۲۵ \times ۰/۰۰۱} = ۱/۲\,mol.L^{-۱} \end{array}\right\} \Rightarrow M_۱ = M_۳ = ۲M_۲$$

**۲۹** گزینه ۳

عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست‌اند. مطابق نمودار، مادهٔ A ناقطبی است (زیرا گشتاور دوقطبی آن حدود صفر است) و قطبیت مادهٔ C از B بیشتر است (زیرا گشتاور دوقطبی بزرگ‌تری نسبت به B دارد)

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: درست. مولکول C قطبیت بیشتری نسبت به A دارد پس انحلال‌پذیری آن بیشتر است.

عبارت دوم: نادرست. مولکول B قطبیت بیشتری نسبت به A دارد و در میدان الکتریکی بیشتر جهت‌گیری می‌کند.

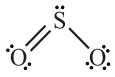
عبارت سوم: درست. هگزان یک حلال ناقطبی است و چون قطبیت مولکول A، از B و C کمتر است، انحلال‌پذیری بیشتری در هگزان دارد.

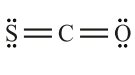
عبارت چهارم: درست. هرچه قطبیت بالاتر باشد، نیروهای بین مولکولی قوی‌تر است.

**۳۰** گزینه ۱

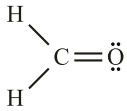
بررسی گزینه‌ها:

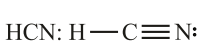
گزینهٔ ۱: نادرست.

$SO_۳$ (گوگرد دی‌اکسید): 

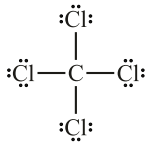
$SCO$ (کربونیل سولفید): 

گزینهٔ ۲: درست.

$CH_۲O$:  ← ۴ جفت‌الکترون پیوندی

$HCN$:  ← ۴ جفت‌الکترون پیوندی

گزینهٔ ۳: درست. همه اتم‌ها از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی کرده و شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی (۱۲)، سه برابر شمار پیوندها (۴) است.

$CCl_۴$: 

گزینهٔ ۴: درست.

$N_۲O_۳$ (دی‌نیتروژن تری‌اکسید) : ۲ + ۳ = ۵ اتم

$Fe_۲O_۳$ (آهن (III) اکسید) $= ۲Fe^{۳+} + ۳O^{۲-}$ = ۵ یون

**۳۱** گزینه ۳

فرمول همهٔ ترکیبات به‌جز $V CO_3$ درست است.

چون وانادیم دارای یون‌های متنوعی است، پس باید از اعداد رومی برای نام‌گذاری ترکیبات حاوی این یون استفاده شود.

وانادیم (II) کربنات : $V CO_3$

**۳۲** گزینه ۱

بخش اول مسئله:

$S = ۰/۸(۳۰) + ۷۲ = ۹۶\,g$ ( در ۱۰۰ گرم آب ) : انحلال‌پذیری در دمای $۳۰^\circ C$

$\frac{\text{۱۰۰g آب}}{\text{۲۵۰g آب}} = \frac{\text{۹۶g نمک}}{x\,g} \Rightarrow x = \frac{۹۶ \times ۲۵۰}{۱۰۰} = ۲۴۰g$ نمک $\Rightarrow ۳۲۴ - ۲۴۰ = ۸۴\,g$ رسوب تشکیل خواهد شد

بخش دوم مسئله:

هنگامی یک محلول سیرنشده است که مقدار ماده حل‌شده از انحلال‌پذیری کمتر باشد، بنابراین:

$۰/۸\theta + ۷۲ > ۸۴ \Rightarrow ۰/۸\theta > ۱۲ \Rightarrow \theta > ۱۵$

**۳۳** گزینه ۳

عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: درست.

$$۱/۹۲\,mg \text{ مس} = \frac{\text{۱ مول مس}}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \text{ اتم مس}} \times \frac{۶۴\,g \text{ مس}}{\text{۱ مول مس}} \times \frac{۱۰^{۳}\,mg \text{ مس}}{۱\,g \text{ مس}} \times ۱/۸۰۶ \times ۱۰^{۱۹} \text{ اتم مس}$$

عبارت دوم: درست.

$$۸\,g\,Cu \times \frac{۱\,mol\,Cu}{۶۴\,g\,Cu} = \frac{۱}{۸}\,mol\,Cu$$

$$۷\,g\,Fe \times \frac{۱\,mol\,Fe}{۵۶\,g\,Fe} = \frac{۱}{۸}\,mol\,Fe$$

عبارت سوم: نادرست. جرم مشخص‌شده هر عنصر در جدول دوره‌ای، در واقع جرم اتمی میانگین آن عنصر است نه عدد جرمی!

عبارت چهارم: درست.

$$۲\,g\,H_۲O \times \frac{۱\,mol\,H_۲O}{۱۸\,g\,H_۲O} \times \frac{۳\,mol \text{ اتم}}{۱\,mol\,H_۲O} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \text{ اتم}}{۱\,mol \text{ اتم}} = ۲ \times ۱۰^{۲۳} \text{ اتم}$$

$$۱\,g\,CO_۲ \times \frac{۱\,mol\,CO_۲}{۴۴\,g\,CO_۲} \times \frac{۳\,mol \text{ اتم}}{۱\,mol\,CO_۲} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \text{ اتم}}{۱\,mol \text{ اتم}} = ۰/۴۱ \times ۱۰^{۲۳} \text{ اتم}$$

عبارت پنجم: نادرست. باتوجه‌به آرایش الکترونی $Ga^{۳+}$، این یون به آرایش هشتتایی نمی‌رسد.

$$_{۳۱}Ga^{۳+} : [_{۱۸}Ar]۳d^{۱۰} \qquad _{۲۱}Sc^{۳+} : [_{۱۸}Ar]$$

**۳۴** گزینه ۱

هر مول آلومینیم سولفید ($Al_۲S_۳$) شامل ۲ مول $Al^{۳+}$ و ۳ مول $S^{۲-}$ است. (مجموعاً ۵ مول یون)

بخش اول مسئله: $?\,\text{یون} = ۱۰\,g\,Al_۲S_۳ \times \frac{۱\,mol\,Al_۲S_۳}{۱۵۰\,g\,Al_۲S_۳} \times \frac{۵\,mol\,\text{یون}}{۱\,mol\,Al_۲S_۳} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,\text{یون}}{۱\,mol\,\text{یون}} \simeq ۲ \times ۱۰^{۲۳}\,\text{یون}$

بخش دوم مسئله: $?\,\frac{g\,S}{g\,Al} = \frac{۳\,mol\,S \times \frac{۳۲\,g\,S}{۱\,mol\,S}}{۲\,mol\,Al \times \frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al}} = \frac{۹۶}{۵۴} = \frac{۱۶}{۹}$

**۳۵** گزینه ۳

بخش اول مسئله:

$$C_۳H_۸ + ۵O_۲ \rightarrow ۳CO_۲ + ۴H_۲O$$

$$?\,mol\,O_۲ = ۰/۳\,mol\,C_۳H_۸ \times \frac{۵\,mol\,O_۲}{۱\,mol\,C_۳H_۸} = ۱/۵\,mol\,O_۲$$

بخش دوم مسئله:

ابتدا $CO_۲$ حاصل از سوختن ۰/۳ مول پروپان را به دست می‌آوریم:

$$?\,mol\,CO_۲ = ۰/۳\,mol\,C_۳H_۸ \times \frac{۳\,mol\,CO_۲}{۱\,mol\,C_۳H_۸} = ۰/۹\,mol\,CO_۲$$

اکنون باید حساب کنیم این مقدار $CO_۲$، ضمن واکنش با منیزیم اکسید، چند گرم منیزیم کربنات تولید می‌کند:

$$MgO + CO_۲ \rightarrow MgCO_۳$$

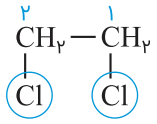
$$?\,g\,MgCO_۳ = ۰/۹\,mol\,CO_۲ \times \frac{۱\,mol\,MgCO_۳}{۱\,mol\,CO_۲} \times \frac{۸۴\,g\,MgCO_۳}{۱\,mol\,MgCO_۳} = ۷۵/۶\,g\,MgCO_۳$$

**۳۶** گزینه ۲

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: درست. واکنش گاز اتن و گاز کلر در مجاورت کاتالیزگر آهن (III) کلرید جامد ($FeCl_3(s)$) انجام می‌شود. (این مطلب در کتاب درسی آورده شده است)

عبارت دوم: نادرست. فرآوردهٔ این واکنش ۱،۲- دی‌کلرواتان است.



(۱،۲- دی‌کلرواتان)

عبارت سوم: درست.

$$C_2H_4 + Cl_2 \rightarrow C_2H_4Cl_2$$

$$?\,g\,C_2H_4Cl_2 = 0/25\,mol\,Cl_2 \times \frac{1\,mol\,C_2H_4Cl_2}{1\,mol\,Cl_2} \times \frac{99\,g\,C_2H_4Cl_2}{1\,mol\,C_2H_4Cl_2} = 24/75\,g$$

عبارت چهارم: درست.

$$C_2H_4 + Cl_2 \rightarrow C_2H_4Cl_2 \quad \Delta H = -178\,kJ$$

مطابق معادلهٔ واکنش، به ازای مصرف یک مول $C_2H_4$ (معادل ۲۸ گرم) و یک مول $Cl_2$ (معادل ۷۱ گرم) که درمجموع شامل ۹۹ گرم از واکنش‌دهنده‌ها می‌باشد، ۱۷۸ کیلوژول انرژی آزاد می‌شود. اکنون باید حساب کنیم برای آزاد شدن ۸/۹ کیلوژول گرما، درمجموع چند گرم از واکنش‌دهنده‌ها باید مصرف شوند:

$$?\,g\ \text{واکنش‌دهنده} = 8/9\,kJ \times \frac{99\,g\ (\text{واکنش‌دهنده})}{178\,kJ} = 4/95\,g$$

**۳۷** گزینه ۴

ابتدا معادله‌ها را موازنه می‌کنیم:

$$2KMnO_4 + 16HCl \rightarrow 2KCl + 2MnCl_2 + 5Cl_2 + 8H_2O$$
$$2KI + Cl_2 \rightarrow 2KCl + I_2$$

بخش اول مسئله:

$$79\,g\,KMnO_4 \times \frac{80\,g\ \text{خالص}}{100\,g\ \text{ناخالص}} \times \frac{1\,mol\,KMnO_4}{158\,g\,KMnO_4} \times \frac{16\,mol\,HCl}{2\,mol\,KMnO_4} \times \frac{1\,L\,HCl}{2\,mol\,HCl}$$
$$\times \frac{10^3\,ml\,HCl}{1\,L\,HCl} = 1600\,ml\,HCl$$

بخش دوم مسئله:

$$79\,g\,KMnO_4 \times \frac{80\,g\ \text{خالص}}{100\,g\ \text{ناخالص}} \times \frac{1\,mol}{158\,g\,KMnO_4} \times \frac{5\,mol\,Cl_2}{2\,mol\,KMnO_4} \times \frac{1\,mol\,I_2}{1\,mol\,Cl_2} \times \frac{254\,g\,I_2}{1\,mol\,I_2}$$
$$\times \frac{85}{100} = 215/9\,g\,I_2$$

**۳۸** گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. هنگامی‌که نفت خام داغ به قسمت پایین برج وارد می‌شود، مولکول‌های سبک‌تر و فرارتر از جمله مواد پتروشیمی، از مایع بیرون آمده و به‌سمت بالای برج حرکت می‌کنند درحالی‌که مواد سنگین‌تر مانند نفت کوره در پایین این برج قرار می‌گیرند.

گزینهٔ ۲: درست. پالایش نفت خام، از سویی سوخت ارزان و مناسب را در اختیار صنایع قرار می‌دهد و از سوی دیگر، منجر به تولید انرژی الکتریکی ارزان قیمت می‌شد.

گزینهٔ ۳: نادرست. در نفت‌های سنگین، درصد خوراک پتروشیمی کمتر از بقیه نفت‌ها است.

گزینهٔ ۴: نادرست. آلکان‌ها بخش عمده هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را تشکیل می‌دهند و به دلیل واکنش‌پذیری کم، اغلب به‌عنوان سوخت به کار می‌روند.

**۳۹** گزینه ۳

در آلکان‌ها با افزایش تعداد اتم‌های کربن، اندازهٔ مولکول، نیروی بین مولکولی، نقطهٔ جوش، گرانروی و میزان چسبندگی، افزایش می‌یابد و با کاهش تعداد اتم‌های کربن، میزان فرار بودن و روانروی آلکان بیشتر می‌شود؛ بررسی مقایسه‌های نادرست:

ب) نادرست. به‌طورکلی گشتاور دوقطبی آلکان‌ها حدود صفر است و همگی مولکول‌های ناقطبی هستند.

ت) نادرست. میزان چسبندگی وازلین (با فرمول تقریبی $C_{۲۵}H_{۵۲}$) بیشتر از گریس (با فرمول تقریبی $C_{۱۸}H_{۳۸}$) است.

ث) نادرست. نیروی بین مولکولی در پارافین‌ها (آلکان‌های با بیش از ۲۰ اتم کربن) بیشتر از بنزین (با فرمول تقریبی $C_۸H_{۱۸}$) است.

**۴۰** گزینه ۱

ابتدا حجم گاز هیدروژن لازم برای تبدیل گاز اتین به اتان را حساب می‌کنیم:

$$C_۲H_۲ + ۲H_۲ \rightarrow C_۲H_۶$$

$$?\,L\,H_۲ = ۰/۱\,mol\,C_۲H_۲ \times \frac{۲\,mol\,H_۲}{۱\,mol\,C_۲H_۲} \times \frac{۲۲/۴\,L\,H_۲}{۱\,mol\,H_۲} = ۴/۴۸\,L\,H_۲$$

این حجم گاز، طبق فرض سوال از واکنش ۴۰ گرم آلیاژ مس و روی با هیدروکلریک اسید به دست آمده است. ازآنجاکه فلز مس با هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهد؛ بنابراین حجم گاز آزادشده مربوط به واکنش فلز روی با هیدروکلریک اسید می‌باشد.

$$Zn + ۲HCl \rightarrow ZnCl_۲ + H_۲$$

$$?\,g\,Zn = ۴/۴۸\,L\,H_۲ \times \frac{۱\,mol\,H_۲}{۲۲/۴\,L\,H_۲} \times \frac{۱\,mol\,Zn}{۱\,mol\,H_۲} \times \frac{۶۵\,g\,Zn}{۱\,mol\,Zn} = ۱۳\,g\,Zn$$

$$\text{جرم مس موجود در آلیاژ} = ۴۰ - ۱۳ = ۲۷\,g$$

$$\%Cu = \frac{\text{جرم مس در آلیاژ}}{\text{جرم آلیاژ}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۷}{۴۰} \times ۱۰۰ = \%۶۷/۵$$

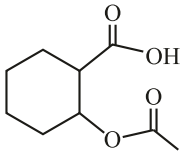
**۴۱** گزینه ۱

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: درست. فرمول مولکولی این ترکیب $C_9H_8O_4$ است و منظور از هیدروکربن سیرشده زنجیره‌ای همان آلکان است. فرمول شیمیایی آلکان ۹ کربنه $C_9H_{20}$ می‌باشد؛ بنابراین:

$$\text{تفاوت هیدروژن} : 20 - 8 = 12$$

گزینهٔ ۲: نادرست. در صورت عوض کردن حلقه آروماتیک با حلقهٔ سیکلوهگزان، ساختار ترکیب به‌صورت زیر می‌شود:



فرمول مولکولی: $C_9H_{14}O_4$

تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن: ۱۴-۸=۶

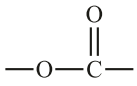
گزینهٔ ۳: نادرست.

$$\text{جرم مولی } C_9H_8O_4 : 9(12) + 8(1) + 4(16) = 180\,g.mol^{-1}$$

$$\text{جرم مولی } C_7H_6O_2 : 7(12) + 6(1) + 2(16) = 122\,g.mol^{-1}$$

$$\text{تفاوت جرم مولی ( بنزوئیک اسید ) : } 180 - 122 = 58\,g.mol^{-1}$$

گزینهٔ ۴: نادرست. گروه عاملی کتونی ندارد (شکل زیر گروه عاملی استری است)



**۴۲** گزینه ۳

گزینهٔ "۳" درست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. شیب نمودار مول- زمان یا غلظت- زمان مواد با ضرایب استوکیومتری آن‌ها متناسب است. البته نمودار مول- زمان مادهٔ $E$، صعودی (شیب مثبت) و نمودار مول- زمان مادهٔ $M$، نزولی (شیب منفی) است؛ بنابراین می‌بایست نسبت شیب نمودارهای $E$ و $M$ برابر $\frac{-4}{3}$ باشد.

گزینهٔ ۲: نادرست. سرعت واکنش به مرور زمان کم می‌شود و رابطه خطی بین سرعت و زمان بر قرار نیست؛ بنابراین بیشتر از ۶۰ ثانیه طول می‌کشد تا واکنش به پایان برسد.

گزینهٔ ۴: نادرست. نسبت ضرایب $A$ به $E$ در دو واکنش یکسان و برابر ۲ است. همچنین باتوجه‌به فرض سوال مقدار اولیه $A$ در شروع هر ۲ واکنش یکسان بوده و کل آن مصرف می‌شود، پس نقطه تقاطعی با یکدیگر ندارند.

**۴۳** گزینه ۴

همهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: درست. برای تبخیر اتانول گرمای کمتری لازم است مصرف شود، پس سریع‌تر تبخیر می‌شود.

عبارت دوم: درست.

$$0/5\,mol\ \text{اتانول} \times \frac{46\,g\ \text{اتانول}}{1\,mol\ \text{اتانول}} \times \frac{840\,J\ \text{گرما}}{1\,g\ \text{اتانول}} \times \frac{1\,kJ}{10^3\,J} = 19/32\,kJ$$

عبارت سوم: درست. تغییر فاز ماده، با تغییر دما همراه نیست؛ مثلاً آب در نقطهٔ جوش خود، از آب مایع $100^\circ C$ به بخار آب $100^\circ C$ تبدیل می‌شود.

عبارت چهارم: درست.

$$1\,mol\ \text{آب} \times \frac{18\,g\ \text{آب}}{1\,mol\ \text{آب}} \times \frac{2280\,J}{1\,g\ \text{آب}} \times \frac{1\,kJ}{10^3\,J} = 41/04\,kJ$$

$$1\,mol\ \text{اتانول} \times \frac{46\,g\ \text{اتانول}}{1\,mol\ \text{اتانول}} \times \frac{840\,J}{1\,g\ \text{اتانول}} \times \frac{1\,kJ}{10^3\,J} = 38/64\,kJ$$

$$\text{تفاوت گرمای لازم برای تبخیر ۱ مول آب و اتانول : } 41/04 - 38/64 = 2/4\,kJ$$

**۴۴** گزینه ۴

$\frac{۱}{۲}\times$ وارونهٔ واکنش اول : $\cancel{HCl} \rightarrow \frac{۱}{۲}\cancel{H_۲(g)} + \frac{۱}{۲}Cl_۲(g) \quad \Delta H_۱ = \frac{-۱}{۲}(۱۸۴/۶)\,kJ$

$\frac{۱}{۲}\times$ معادلهٔ واکنش : $\cancel{\frac{۱}{۲}H_۲} \rightarrow \cancel{H^+(aq)} \qquad \Delta H_۲ = ۰$

وارونهٔ واکنش سوم : $\cancel{H^+} + Cl^- \rightarrow \cancel{HCl} \qquad \Delta H_۳ = ۷۵/۲\,kJ$

واکنش کلی : $Cl^- \rightarrow \frac{۱}{۲}Cl_۲$

$\Delta H_{(\text{واکنش کلی})} = \Delta H_۱ + \Delta H_۲ + \Delta H_۳ = ۹۲/۳ + ۰ + ۷۵/۲ = +۱۶۷/۵\,kJ$

$pH > ۰ \Rightarrow$ واکنش گرماگیر است

**۴۵** گزینه ۴

a: تغییر آنتالپی مربوط به تبدیل بخار به جامد (چگالش)

b: تغییر آنتالپی مربوط به تبدیل بخار به مایع (میعان)

c: تغییر آنتالپی مربوط به تبدیل مایع به بخار (تبخیر)

d: تغییر آنتالپی مربوط به تبدیل مایع به جامد (انجماد)

e: تغییر آنتالپی مربوط به تبدیل جامد به مایع (ذوب)

f: تغییر آنتالپی مربوط به تبدیل جامد به بخار (فرازش یا تصعید)

**۴۶** گزینه ۱

$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_A}{۱}$

به ازای هر $۱۰^\circ C$ افزایش دما، سرعت واکنش (که با سرعت مصرف A برابر است) دو برابر می‌شود؛ پس برای آنکه سرعت واکنش از ۰/۴ به ۳/۲ مول بر لیتر بر ثانیه برسد (یعنی ۸ برابر افزایش پیدا کند)، می‌بایست دما را $۳۰^\circ C$ افزایش دهیم.

$$۰/۴\,mol.L^{-۱}.s^{-۱} \xrightarrow[۱۰^\circ C]{\text{۲ برابر}} ۰/۸ \xrightarrow[۱۰^\circ C]{\text{۲ برابر}} ۱/۶ \xrightarrow[۱۰^\circ C]{\text{۲ برابر}} ۳/۲$$

**۴۷** گزینه ۴

باتوجه‌به معادلهٔ شیمیایی آبکافت استر موردنظر و رعایت قانون پایستگی جرم، فرمول شیمیایی کربوکسیلیک اسید حاصل به‌صورت $C_۶H_{۱۲}O_۲$ خواهد بود.

$$\underset{(\text{استر})}{C_۹H_{۲۰}CO_۲} + H_۲O \rightarrow \underset{(\text{بوتانول})}{C_۴H_{۱۰}O} + \underset{(\text{کربوکسیلیک اسید})}{C_۶H_{۱۲}O_۲}$$

در واقع کربوکسیلیک اسید دارای یک زنجیرهٔ هیدروکربنی شامل ۵ اتم کربن و یک گروه کربوکسیل می‌باشد.

$C_۶H_{۱۲}O_۲ \equiv C_۵H_{۱۱}COOH$

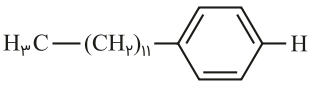
$$?\,g\ \text{استر} = ۲۹\,g\ \text{اسید} \times \frac{۱\,mol\ \text{اسید}}{۱۱۶\,g\ \text{اسید}} \times \frac{۱\,mol\ \text{استر}}{۱\,mol\ \text{اسید}} \times \frac{۱۷۲\,g\ \text{استر}}{۱\,mol\ \text{استر}} = ۴۳\,g\ \text{استر}$$

**۴۸** گزینه ۱

بخش یونی ترکیب داده‌شده، $(-SO_3^-Na^+)$ می‌باشد. این بخش از ترکیب را حذف کرده و یک اتم هیدروژن جایگزین آن می‌کنیم.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: درست. ساختار جدید به شکل زیر است:



فرمول ترکیب : $C_{18}H_{30} \Rightarrow$ جرم مولی $= 18(12) + 30(1) = 246\,g.mol^{-1}$

متیل متانوات ( استر ۲ کربنه ) : $C_2H_4O_2 \Rightarrow$ جرم مولی $= 2(12) + 4(1) + 2(16) = 60\,g.mol^{-1}$

نسبت جرم مولی $= \frac{246}{60} = 4/1$

گزینهٔ ۲: نادرست. ترکیب جدید، یک هیدروکربن است. به همین دلیل نسبت به ترکیب اولیه قابلیت سوختن بیشتری دارد.

گزینهٔ ۳: نادرست.

جرم مولی آلکین : $18(12) + 34(1) = 250\,g.mol^{-1}$

گزینهٔ ۴: نادرست. ترکیب جدید، یک هیدروکربن است. می‌دانیم هیدروکربن‌ها ناقطبی بوده و گشتاور قطبی آن‌ها تقریباً برابر صفر است؛ بنابراین این ترکیب در آب و حلال‌های قطبی حل نمی‌شود. درحالی‌که ترکیب اولیه یک شوینده غیرصابونی است، که ازطریق بخش قطبی خود به راحتی در آب (حلال قطبی) حل می‌شود.

**۴۹** گزینه ۴

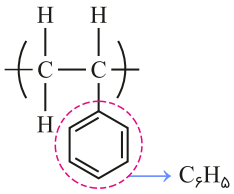
عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: نادرست. پلیمرها از پیوند یونی تشکیل نشده‌اند و بین اتم‌های سازندهٔ آن‌ها، پیوند کووالانسی برقرار است.

عبارت دوم: درست. دارای ۸ کربن و ۸ هیدروژن است.

واحد تکرارشونده پلی‌استیرن:




عبارت سوم: درست. نشاسته یک پلیمر طبیعی است که مونومر سازندهٔ آن مولکول‌های گلوکز هستند. این مولکول‌ها به‌صورت واحدهای تکرارشونده در مولکول نشسته وجود دارند.

عبارت چهارم: نادرست. همه پلیمرها مصنوعی نیستند و پلیمرهای طبیعی نیز داریم. شاخ حیوانات و پشم گوسفند نمونه‌ای از پلیمرهای طبیعی از جنس پلی‌آمید هستند.

عبارت پنجم: نادرست. واحدهای تکرارشونده لزوماً بزرگ نیست و می‌تواند کوچک باشد.

**۵۰** گزینه ۲

عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: درست. وجود گروه‌های هیدروکسیل متعدد $(-OH)$ در ساختار ترکیب موردنظر باعث می‌شود مولکول‌های این ترکیب به راحتی با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کرده و در آن حل شوند.

توجه: وجود گروه‌های متعدد هیدروکسیل و اتری موجود در ترکیب داده‌شده باعث می‌شود این ترکیب درمجموع قطبی بوده و در حلال‌های ناقطبی مانند بنزن حلالیت چندانی نداشته باشد.

عبارت دوم: نادرست. در ساختار ترکیب داده‌شده، ۸ گروه هیدروکسیل و ۱۲ اتم کربن وجود دارد؛ بنابراین شمار اتم‌های کربن، ۱/۵ برابر شمار گروه‌های هیدروکسیل است.

عبارت سوم: نادرست. این ترکیب سیرشده، دارای یک حلقهٔ شش اتمی و یک حلقهٔ پنج اتمی است که این حلقه‌ها توسط یک اتم اکسیژن به یکدیگر اتصال دارند.

عبارت چهارم: درست. هر مول از این ترکیب دارای ۸ مول گروه عاملی الکلی $(-OH)$ است. اگر به‌جای گروه‌های عاملی الکلی، گروه‌های متیل قرار بگیرد، جرم مولی آن، ۱۶ واحد کاهش می‌یابد.

$$OH = ۱۷\,g.mol^{-۱}\ ,\ CH_۳ = ۱۵\,g.mol^{-۱} \xrightarrow[\text{یک مول متیل}]{\text{تغییر جرم به ازای جایگزین کردن}} ۱۵ - ۱۷ = -۲ \quad (۲ \text{ گرم کاهش جرم})$$

$$\xrightarrow[\text{۸ مول متیل}]{\text{تغییر جرم به ازای جایگزین کردن}} ۸(-۲) = -۱۶ \quad (۱۶ \text{ گرم کاهش جرم})$$

## حسابان

**۵۱** گزینه ۲

$$S_n = \frac{n}{۲}(-۴۴ + ۶(n-۱)) = \frac{n}{۲}(۶n - ۵۰)$$

حاصل این عبارت، باید مقداری بزرگ‌تر یا مساوی با ۱۰۰۰ شود، باتوجه‌به اینکه حل نامعادلهٔ مرتبط با آن بسیار دشوار است، از امتحان گزینه‌ها کمک می‌گیریم:

$$n = ۲۱ \Rightarrow S_{۲۱} = \frac{۲۱}{۲}(۶ \times ۲۱ - ۵۰) = \frac{۲۱}{۲} \times ۷۶ = ۲۱ \times ۳۸ = ۷۹۸$$

$$n = ۲۲ \Rightarrow S_{۲۲} = ۱۱(۶ \times ۲۲ - ۵۰) = ۱۱ \times ۸۲ = ۹۰۲$$

$$n = ۲۳ \Rightarrow S_{۲۳} = \frac{۲۳}{۲}(۶ \times ۲۳ - ۵۰) = \frac{۲۳}{۲} \times ۸۸ = ۱۱/۵ \times ۸۸ = ۱۰۱۲$$

بنابراین گزینهٔ "۲" صحیح است.

**۵۲** گزینه ۱

نکته: جملهٔ $n$ ام دنبالهٔ هندسی برابر است با $a_n = a_1 r^{n-1}$ .

$$\underbrace{۴}_{a_1}, _, _, _, _, \underbrace{۹۷۲}_{a_6}$$

$$a_6 = ۹۷۲ \Rightarrow a_1 r^5 = ۹۷۲ \xrightarrow{a_1=۴} ۴ \times r^5 = ۹۷۲ \Rightarrow r^5 = ۲۴۳ = ۳^5 \Rightarrow r = ۳$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} \Rightarrow S_6 = \frac{۴(1-۳^6)}{1-۳} = ۱۴۵۶$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۶ عدد} = ۱۴۵۶$$

**۵۳** گزینه ۳

روش اول:

$$\alpha + \beta = ۱ \Rightarrow \alpha = ۱ - \beta, \alpha\beta = -۲$$

$$\Rightarrow (۱-\beta)\beta = -۲ \Rightarrow \beta^۲ - \beta - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \beta = ۲ \Rightarrow \alpha = -۱ \\ \beta = -۱ \Rightarrow \alpha = ۲ \end{cases}$$

حال با جایگذاری $\alpha$ یا $\beta$ در معادلهٔ سؤال داریم:

$$-۴ + k + ۹ - ۲ = ۰ \Rightarrow ۳ + k = ۰ \Rightarrow k = -۳$$

روش دوم:

نکته: حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ درجه ۳، $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ به صورت $P = \frac{-d}{a}$ و $S = \frac{-b}{a}$ است.

فرض می‌کنیم این معادله ریشهٔ دیگری به نام $\gamma$ دارد. پس:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{۲}{۴} \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \frac{۱}{۲}$$

چون می‌دانیم $\alpha\beta = -۲$، پس:

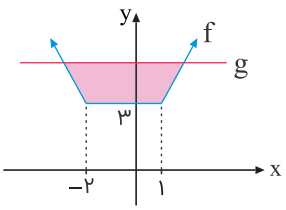
$$\alpha\beta\gamma = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\alpha\beta=-۲} -۲\gamma = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \gamma = \frac{-۱}{۴}$$

ازطرفی می‌دانیم:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-k}{۴} \xrightarrow[\gamma=\frac{-۱}{۴}]{\alpha+\beta=۱} ۱ + (\frac{-۱}{۴}) = \frac{-k}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{-k}{۴} \Rightarrow k = -۳$$

**۵۴** گزینه ۲




ارتفاع ذوزنقه برابر $m-۳$ و قاعدهٔ کوچک برابر ۳ واحد است. قاعدهٔ بزرگ به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} ۲x+۱=m \Rightarrow x=\dfrac{m-۱}{۲} \\ -۲x-۱=m \Rightarrow x=\dfrac{-۱-m}{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{قاعدهٔ بزرگ} = \frac{m-۱}{۲}-\frac{-۱-m}{۲}=m$$

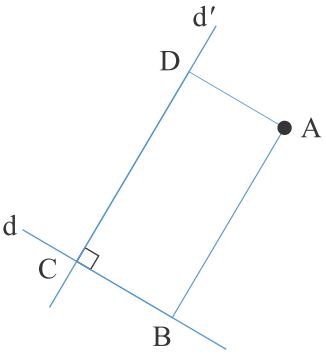
$$S=\frac{(m-۳)(m+۳)}{۲}=\frac{۱}{۲}(m^۲-۹)$$

**۵۵** گزینه ۲

$$d: ۲x+۴y+۵=۰ \Rightarrow m=\frac{-۱}{۲}$$

$$d': ۲x-y+۴=۰ \Rightarrow m'=۲$$

دو خط $d$ و $d'$ بر هم عمودند، بنابراین متوازی‌الاضلاع صورت سؤال به صورت مستطیل است.




$AB$ و $AD$ دو ضلع مستطیل هستند که اندازهٔ هرکدام برابر فاصلهٔ نقطهٔ یادشده از هر دو خط هستند. (نقطهٔ $A$ روی هیچ‌کدام از دو خط $d$ و $d'$ قرار ندارد)

$$AB=\frac{|۲+۸+۵|}{\sqrt{۲^۲+۴^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۱۵}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۱۵\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

$$AD=\frac{|۲-۲+۴|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\text{محیط}=۲(AB+AD)=۲(\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۴\sqrt{۵}}{۵})$$

$$=۲(\frac{۲۳\sqrt{۵}}{۱۰})=\frac{۲۳\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۲۳}{\sqrt{۵}}$$

**۵۶** گزینه ۳

نکته: برد تابع ثابت تک عضوی است یعنی به هر عضو دامنه، عددی ثابت مانند $k$ را نسبت می‌دهد.
موارد "ج" و "د" برد تابع تک عضوی است، بنابراین توابع ثابت هستند. مورد "ب" برد تابع برابر اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.
برای مورد "الف" داریم:

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \dfrac{x+۱}{۲x+۲} \end{cases}$$

با ساده کردن ضابطهٔ تابع $f$ داریم:

$$f(x) = \frac{x+۱}{۲(x+۱)} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین مورد "الف" نیز یک تابع ثابت است، پس گزینهٔ ۳ صحیح است.

**۵۷** گزینه ۳

تابع $g$ یک تابع خطی است. باتوجه‌به نمودار تابع $g$ ، ضابطهٔ آن را به دست می‌آوریم:

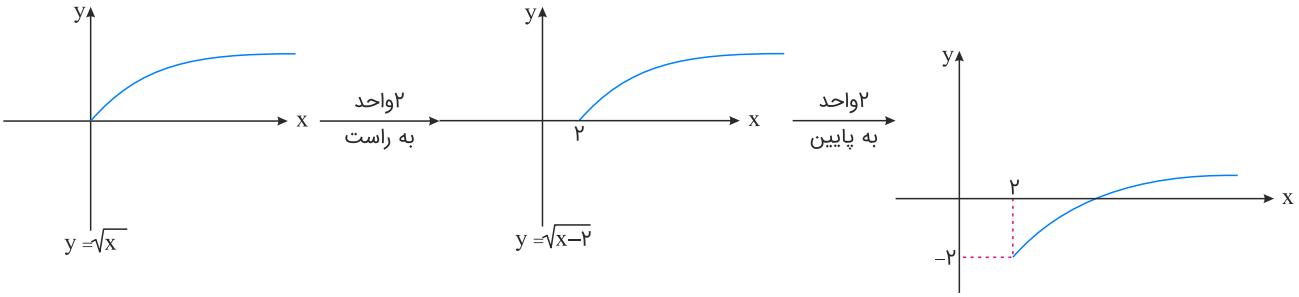
$$m = \frac{۳-۰}{۰-۳} = -۱$$

$$y - ۰ = -۱(x-۳) \Rightarrow y = -x+۳ \Rightarrow g(x) = -x+۳$$

با جایگذاری ضابطهٔ $g$ در $f$؛ ضابطهٔ $f$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \sqrt{۱-g(x)} - ۲ \xrightarrow{g(x)=-x+۳} f(x) = \sqrt{۱-(-x+۳)} - ۲ \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-۲} - ۲$$

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-۲} - ۲$، کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ابتدا ۲ واحد به راست ببریم و $y = \sqrt{x-۲}$ و سپس آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم تا به ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x-۲} - ۲$ برسیم.



**۵۸** گزینه ۴

$$\frac{۴-۲x}{۳x+۱} \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۴-۲x=۰ \Rightarrow x=۲ \\ ۳x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

| $x$ | | $-\frac{۱}{۳}$ | | $۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۴-۲x$ | + | | + | ۰ | − |
| $۳x+۱$ | − | ۰ | + | | + |
| $\frac{۴-۲x}{۳x+۱}$ | − | ت ن | + | ۰ | − |

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} < x \leq ۲ \xrightarrow{\times ۳} -۱ < ۳x \leq ۶$$

$$\Rightarrow [۳x] = -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ \Rightarrow \text{۸ عضو}$$

**۵۹** گزینه ۲

$$(a,b) \in f(x) \Rightarrow (b,a) \in f^{-۱}(x)$$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های هر نقطه را جابه‌جا کنیم و در تابع $y = x^۳ - x + ۱$ صدق دهیم.

گزینهٔ ۱ : $(-۲)^۳ - (-۲) + ۱ \neq -۱$ ×

گزینهٔ ۲ : $(\frac{۱}{۲})^۳ - (\frac{۱}{۲}) + ۱ = \frac{۵}{۸}$ ✓

گزینهٔ ۳ : $۲^۳ - ۲ + ۱ \neq ۱$ ×

گزینهٔ ۴ : $(-\frac{۱۱}{۸})^۳ - (-\frac{۱۱}{۸}) + ۱ \neq -\frac{۱}{۲}$ ×

**۶۰** گزینه ۴

برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون در تست کافی است $x$ای دلخواه در دامنهٔ تابع انتخاب کنیم (بهتر است نقطه‌های ابتدا و انتهای دامنه را انتخاب نکنیم، چون ممکن است دو گزینه یا بیشتر درست شوند) سپس با قرار دادن آن در تابع داده‌شده، $y$ متناظر با آن را حساب کرده و سپس جای $x$ و $y$ نقطهٔ به‌دست‌آمده را عوض کرده و در گزینه‌ها جایگذاری کنیم تا گزینهٔ درست مشخص شود.

$$y = \sqrt{x - ۲\sqrt{x-۱}} \xrightarrow{x=۵} f(۳) = \sqrt{۵ - ۲\sqrt{۵-۱}} = \sqrt{۵-۲(۲)} = \sqrt{۱} = ۱$$

$$\Rightarrow A\begin{vmatrix} ۵ \\ ۱ \end{vmatrix} \in f \Leftrightarrow A'\begin{vmatrix} ۱ \\ ۵ \end{vmatrix} \in f^{-۱} \Rightarrow \text{گزینهٔ ۴}$$

**۶۱** گزینه ۱

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$fofof(\sqrt{۲}) = f(f(f(\sqrt{۲})))$$
$$f(\sqrt{۲}) = \frac{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$
$$f(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) = \frac{(\sqrt{۲})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})}{۳(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) - \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$
$$f(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow fofof(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

**۶۲** گزینه ۳

ابتدا تعریف دامنهٔ $gof$ را می‌نویسیم:

$$D_{gof} = D_{g(f(x))} = \{x | x \in D_f , f(x) \in D_g\}$$

$f(x) = ۶x^۲ - ۳$ چندجمله‌ای و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است. (I)

دامنهٔ $g(x)$ نیز طبق شکل بازهٔ $-۳ < x \leq ۳$ است. می‌دانیم که $f(x)$ باید به‌جای $x$های $g(x)$ بنشیند.

$$D_{g(f(x))} = \{x | x \in \mathbb{R} \ , \ -۳ < ۶x^۲ - ۳ \leq ۳\}$$
$$۰ < ۶x^۲ \leq ۶ \Rightarrow ۰ < x^۲ \leq ۱$$
$$|x| \leq ۱ \Rightarrow x \in [-۱, ۱] \quad (II)$$
$$۰ < x^۲ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{۰\} \quad (III)$$
$$(I) \cap (II) \cap (III) : [-۱, ۱] - \{۰\}$$

گزینهٔ ۴ می‌تواند دام آموزشی باشد، چراکه در حل $۰ < x^۲$، به نظر $x \in \mathbb{R}$ است، درحالی‌که باید $x \neq ۰$ باشد.

**۶۳** گزینه ۳

راه حل اول:

$$۵^x = ۱۰ \Rightarrow x = \log_۵ ۱۰ = \log_۵ (۲ \times ۵) = \log_۵ ۲ + \log_۵ ۵$$
$$\Rightarrow x = \log_۵ ۲ + ۱ \Rightarrow \log_۵ ۲ = x - ۱$$
$$۲^{f(x)} = ۲۰ \Rightarrow f(x) = \log_۲ ۲۰ = \frac{\log_۵ ۲۰}{\log_۵ ۲} = \frac{\log_۵ (۴ \times ۵)}{\log_۵ ۲}$$
$$= \frac{\log_۵ (۲^۲ \times ۵)}{\log_۵ ۲} = \frac{۲\log_۵ ۲ + \log_۵ ۵}{\log_۵ ۲} = \frac{۲(x-۱)+۱}{x-۱} = \frac{۲x-۱}{x-۱}$$

راه حل دوم:

$$\log_۵ ۲ = x - ۱$$
$$۲^{f(x)} = ۲۰ \Rightarrow f(x) = \log_۲ ۲۰ = \log_۵ (۲^۲ \times ۵)$$
$$= ۲\log_۲ ۲ + \log_۲ ۵ = ۲ + \frac{۱}{x-۱} = \frac{۲x-۲+۱}{x-۱} = \frac{۲x-۱}{x-۱}$$

**۶۴** گزینه ۱

$$f(\frac{۱}{۲}) = ۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۱ = \sqrt[۳]{۲^{\frac{a}{۲}+b}} \Rightarrow ۲^{\frac{a}{۲}+b} = ۱ \Rightarrow \frac{a}{۲} + b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۲}(*)$$

$$f^{-۱}(۸) = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۸ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۸ = \sqrt[۳]{۲^{۵a+b}}$$

$$۲^{۵a+b} = ۲^{۹} \Rightarrow ۵a + b = ۹ \xrightarrow{(*)} ۵a - \frac{a}{۲} = ۹ \Rightarrow \frac{۹a}{۲} = ۹ \Rightarrow a = ۲ \xrightarrow{(*)} b = -۱$$

در آخر داریم:

$$a - b = ۲ - (-۱) = ۳$$

**۶۵** گزینه ۳

$$\log_{۲}۳ = a \Rightarrow ۲^{a} = ۳ \Rightarrow ۲^{۲a} = ۹(*)$$

$$\log_{۸}b = \frac{۲}{۳}(۱ + a) \Rightarrow b = ۸^{\frac{۲}{۳}(۱+a)} \xrightarrow{۸=۲^{۳}} b = ۲^{۲(۱+a)} \Rightarrow b = ۲^{۲} \times ۲^{۲a}$$

$$\xrightarrow{(*)} b = ۲^{۲} \times ۹ \Rightarrow b = ۳۶$$

$$\log(۳b - ۸) = \log(۳(۳۶) - ۸) = \log(۱۰۸ - ۸) = \log ۱۰۰ = ۲$$

**۶۶** گزینه ۲

$$۳^{x+y} \div ۹ = \frac{۱}{۳^{۱-x}} \Rightarrow ۳^{x+y} \div ۳^{۲} = ۳^{x-۱}$$
$$\Rightarrow x + y - ۲ = x - ۱ \Rightarrow y = ۱$$

$$\log_{۲}(۵x + ۱) + ۵^{۱} = ۳^{۲} \Rightarrow \log_{۲}(۵x + ۱) = ۴$$
$$\Rightarrow ۵x + ۱ = ۱۶ \Rightarrow x = ۳$$

$$x - y = ۳ - ۱ = ۲$$

**۶۷** گزینه ۱

گام اول

با توجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan ۱۵^\circ$ داده شده است، سعی می کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویهٔ $۱۵^\circ$ به دست آوریم.

گام دوم

$$A=\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}{\sin(۵۴۰^\circ-۱۵)-\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}$$
$$=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)}{\sin(۳\pi-۱۵^\circ)-\sin(\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)}=\frac{\sin ۱۵^\circ-(-\cos ۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}=\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}$$

برای این که در کسر داده شده $\tan ۱۵^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می کنیم. بنابراین داریم:

$$A=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}+\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}$$
$$=\frac{\tan ۱۵^\circ+۱}{\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

**۶۸** گزینه ۲

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۳})=\sin(\frac{۵\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\tan(\frac{۱۶\pi}{۳})=\tan(\frac{۴\pi}{۳})=\sqrt{۳}$$
$$\cos^۲(\frac{۱۰۳\pi}{۶})=\cos^۲(\frac{۷\pi}{۶})=(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲=\frac{۳}{۴}$$

پس داریم:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\sqrt{۳})-\frac{۳}{۴}=-\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۴}=-\frac{۹}{۴}$$

**۶۹** گزینه ۳

مقدار تابع و حد چپ و راست تابع را در $x = ۰$ می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} [x] - ۲a = -۱ - ۲a$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱-\cos x}{۲bx^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲ \frac{x}{۲}}{۲bx^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\frac{x^۲}{۴}}{۲bx^۲} = \frac{۱}{۴b}$$

$$f(۰) = |b - ۰| = |b|$$

حال برای پیوستگی باید: $-۱ - ۲a = \frac{۱}{۴b} = |b|$

$$\Rightarrow |b| = \frac{۱}{۴b} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{۱}{۴b} \Rightarrow ۴b^۲ = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} & , b > ۰ \\ b = -\frac{۱}{۴b} \Rightarrow -۴b^۲ = ۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$-۱ - ۲a = \frac{۱}{۴b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۴}$$

$$b - a = \frac{۱}{۲} - (-\frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴} = \frac{۲+۳}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

توجه: تابع $f$ همواره پیوسته نیست! در نقاط $\mathbb{Z}^-$ این تابع ناپیوسته است.

**۷۰** گزینه ۴

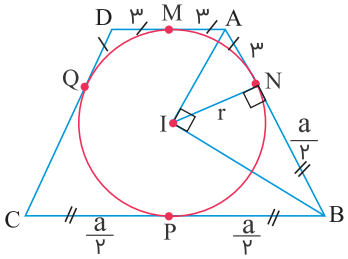
$$x \to -۱^+ \Rightarrow [x] = -۱ \, , \, [-x] = ۰ \, , \, x + ۱ > ۰ \Rightarrow |x+۱| = x + ۱$$

$$\lim_{x\to -۱^+} \frac{|x+۱| - [x]}{x - [-x]} = \lim_{x\to -۱^+} \frac{x + ۱ + (-۱)}{x - ۰} = \lim_{x\to -۱^+} \frac{x}{x} = ۱$$

**۷۱** گزینه ۴

شعاع دایره را $r$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$S_{\text{دایره}} = ۱۵\pi \Rightarrow \pi r^۲ = ۱۵\pi \Rightarrow r^۲ = ۱۵ \quad (*)$$




چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است، نقاط $M$ و $P$ وسط قاعده‌ها بوده و چون طول مماس‌هایی که از یک نقطه بر دایره رسم می‌شوند، یکسان است، $AN = AM = ۳$ و $BN = BP = \frac{a}{۲}$. می‌دانیم مرکز دایرهٔ محاطی، محل همرسی نیمسازهای داخلی ذوزنقه است. از طرف دیگر نیمسازهای زاویه‌های $A$ و $B$ بر هم عمودند (چرا؟)

پس مثلث $AIB$ قائم‌الزاویه است و طبق روابط طولی در آن، داریم:

$$IN^۲ = BN.NA \Rightarrow r^۲ = ۳(\frac{a}{۲}) \xrightarrow{(*)} ۱۵ = \frac{۳a}{۲} \Rightarrow a = ۱۰$$

**۷۲** گزینه ۴

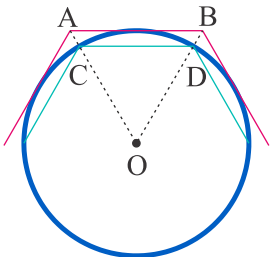
شعاع‌های دو دایره را $R$ و $R'$ می‌نامیم $(R > R')$. می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج، برابر $۲\sqrt{RR'}$ است. حال داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(\text{شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر})$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} ۴RR' = \frac{۳}{۴}R^۲$$

$$\xrightarrow{\times \frac{۴}{۳R}} \frac{۱۶}{۳}R' = R \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{۱۶}{۳}$$

**۷۳** گزینه ۴




$$CD \times AB = ۲R\sin(\frac{۱۸۰}{n}) \times ۲R\tan(\frac{۱۸۰}{n})$$

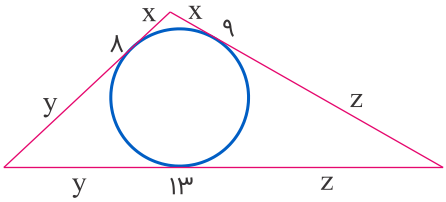
$$\Rightarrow CD \times AB = ۴R^۲ \times \frac{\sin^۲(\frac{۱۸۰}{n})}{\cos(\frac{۱۸۰}{n})}$$

$$\xrightarrow[n=۶]{R=\frac{\sqrt{۶}}{۲}} CD \times AB = ۴ \times (\frac{\sqrt{۶}}{۲})^۲ \times \frac{\sin^۲ ۳۰}{\cos ۳۰}$$

$$= ۴ \times \frac{۶}{۴} \times \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \sqrt{۳}$$

**۷۴** گزینه ۱

راه‌حل اول: می‌دانیم مماس‌های رسم‌شده از هر نقطه بر دایره باهم برابرند. داریم:




$$\begin{cases} x+y=۸ \\ x+z=۹ \\ y+z=۱۳ \end{cases} \Rightarrow ۲(x+y+z)=۳۰ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

بنابراین $x=۲$، $y=۶$ و $z=۷$ می‌باشد، درنتیجه:

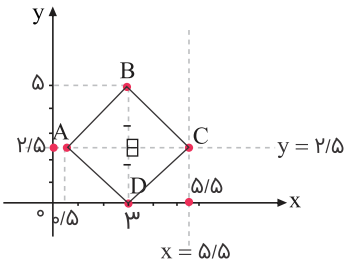
$$\frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم:

$$\frac{x}{y}=\frac{p-۱۳}{p-۹}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

**۷۵** گزینه ۲

اولاً چون بازتاب نقطهٔ $D$ نسبت به محور $x$ها خودش می‌شود، این نقطه روی محور $x$ها قرار دارد، پس $D(۳\ ,\ ۰)$. می‌دانیم قطرهای مربع، عمودمنصف یک‌دیگرند. پس نقطهٔ $C$، محل برخورد خط $x = ۵/۵$ با خط $y = ۲/۵$ (عمودمنصف $BD$) است؛ درنتیجه $C(۵/۵\ ,\ ۲/۵)$ پس فاصلهٔ $C$ از قطر $BD$ برابر است $۵/۵ - ۳ = ۲/۵$. بنابراین بازتاب $C$ نسبت به $BD$، نقطهٔ $A(۰/۵\ ,\ ۲/۵)$ است.

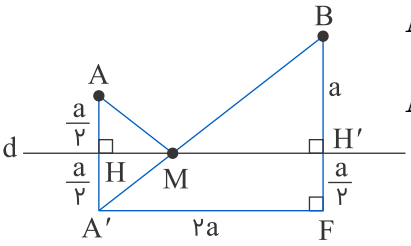



حال فاصلهٔ $A$ از مبدا مختصات برابر است با:

$$\sqrt{(۰/۵)^۲ + (۲/۵)^۲} = \sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۵}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۲۶}{۴}} = \sqrt{\frac{۱۳}{۲}} = \sqrt{۶/۵}$$

**۷۶** گزینه ۱

از حل مسئلهٔ هرون برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر استفاده می‌کنیم. بازتاب $A$ نسبت به $d$ را $A'$ می‌نامیم. $A'$ را به $B$ وصل می‌کنیم تا خط $d$ را در نقطهٔ $M$ قطع کند، $AMB$ مسیر مطلوب است. در ادامه طول آن را محاسبه می‌کنیم:




$$\text{طول کوتاه‌ترین مسیر } AMB = AM + MB = A'M + MB = A'B$$

$$\overset{\Delta}{A'FB} : A'B^۲ = A'F^۲ + BF^۲ = (۲a)^۲ + (\frac{۳a}{۲})^۲$$

$$= ۴a^۲ + \frac{۹a^۲}{۴} = \frac{۱۶a^۲ + ۹a^۲}{۴} = \frac{۲۵a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow A'B = \frac{۵a}{۲}$$

**۷۷** گزینه ۱

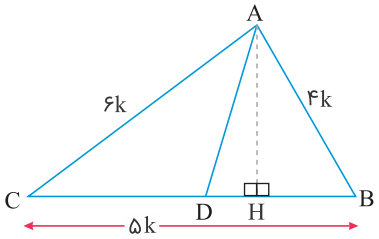
بنابر تعریف تجانس می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{WA'} = k \cdot \overrightarrow{WA}$$

درنتیجه:

$$A' - W = k \cdot \overrightarrow{WA} \Rightarrow A' = W + k \cdot \overrightarrow{WA} = (۲\ ,\ ۱) + ۳(-۱\ ,\ ۱) = (-۱\ ,\ ۴)$$

**۷۸** گزینه ۳




طول اضلاع مثلث را $۴k$، $۵k$ و $۶k$ فرض کرده و نیمساز وارد بر ضلع متوسط را رسم می‌کنیم. طبق خاصیت نیمساز، داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{DC+BD}=\frac{AB}{AC+AB}\Rightarrow\frac{BD}{۵k}=\frac{۴k}{۱۰k}$$

$$\Rightarrow BD=۲k(*)$$

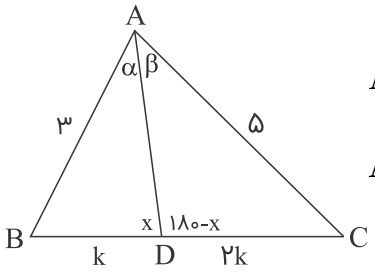
چون ارتفاع AH در مثلث‌های ABC و ABD مشترک است، داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}=\frac{BC}{BD}\overset{(*)}{=}\frac{۵k}{۲k}=\frac{۵}{۲}$$

تذکر: برای سادگی محاسبات، می‌توانستیم طول اضلاع مثلث را ۴، ۵ و ۶ واحد فرض کنیم.

**۷۹** گزینه ۴

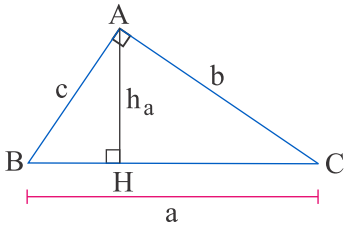
از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیه سینوس‌ها در دو مثلث $ABD$ و $ACD$ می‌توان نوشت:




$$\overset{\triangle}{ABD}:\frac{k}{\sin\alpha}=\frac{۳}{\sin x}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{k\cdot\sin x}{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ADC}:\frac{۲k}{\sin\beta}=\frac{۵}{\sin(۱۸۰-x)}\Rightarrow\sin\beta=\frac{۲k\sin x}{۵}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{۵}{۶}$$

**۸۰** گزینه ۳




$$\begin{cases}\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=\frac{b^۲+c^۲}{b^۲c^۲}=\frac{a^۲}{b^۲c^۲}=\frac{۱}{(\frac{bc}{a})^۲}\\ S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{a\times h_a}{۲}=\frac{c\times b}{۲}\Rightarrow h_a=\frac{bc}{a}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=\frac{۱}{h_a^۲}$$